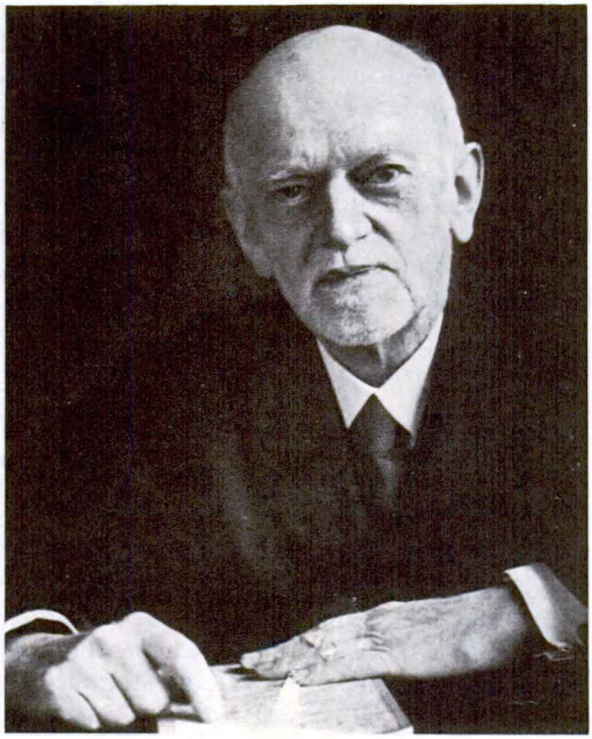

David Hilbert (1862-1943)

ELS ORÍGENS DE LA TEORIA DE CONJUNTS

per

Josep Pla i Carrera

> *"– ... A mi m'agraden les novel·les de lladres i serenos –va dir. Però opino que no comencen on haurien de començar. Comencen amb l'assassinat. Però l'assassinat és el final. La història comença molt abans amb totes les causes i esdeveniments que reuneixen determinades persones en un lloc determinat a una hora determinada i d'un dia determinat."*
>
> *"Towards zero". Aghata Christie*

On comença realment el desenvolupament d'una teoria? I, concretament, la teoria que volem analitzar aquí –la teoria cantoriana dels conjunts– on comença? De quines fonts rep la inspiració? Posar això de manifest constitueix la tasca real, pregona i difícil d'aquell qui pretén realitzar una anàlisi històrica prou interessant i completa, i el qui us parla no és, ni de bon tros, el més indicat per a portar a bon terme aquesta anàlisi. Malgrat tot ho intentarà.

"El segle XIX matemàtic s'obre amb una crisi de l'infinit". Recordem el plany d'Abel [1826] pel fet de raonar sobre sèries divergents: "... són quelcom de ben nefast i és vergonyós que hom gosi fonamentar-hi cap demostració... Són elles [les sèries] les que han fet tant de mal i causat tantes paradoxes". Però hem de dir també que el segle XIX es clou amb una proposta de solució sobre el problema de l'infinit i així Hilbert pot exclamar l'any 1925: "Cantor ha creat un món nou del qual mai més no ens podrà expulsar ningú".

Quines eren doncs les llacunes amb què topava el món matemàtic del segle XIX i que havien de portar Cantor a construir la teoria dels conjunts? Si bé és difícil i poc aconsellable simplificar tota anàlisi històrica, podem dir que hi havia tres problemes importants que calia precisar: les sèries trigonomètriques; el concepte de funció i els problemes de la convergència de funcions; el concepte de nombre real.

Per tal d'entendre el tipus de problemes que es plantejaven, considerem la demostració de Bolzano de 1799 de la proposició:

> "Tota funció algèbrica racional d'una variable es descompon en factors de primer o segon grau".

Cap dels raonaments anteriors al de Bolzano no escapava a l'alternativa de "cercle viciós-recurs a la intuïció geomètrica". Bolzano, en canvi, el dedueix fàcilment del postulat:

> "Una línia contínua amb curvatura simple les ordenades de la qual són primer positives i després negatives ha de tallar necessàriament l'eix de les abscisses en un punt almenys, situat entre aquelles ordenades".

Aquesta proposició és realment evident en el sentit sensible del mot.
La demostració de Bolzano mena a una successió

$$u, u + v/2^m, u + v/2^m + v/2^{m+n}, \dots \qquad (*)$$

que és *convergent* i el seu límit *U* és l'abscissa buscada. Pensem que les abscisses *u* i *v* les hem agafades *racionals*, la successió (*) és una successió racional convergent –en el sentit de Bolzano– *fonamental* en el nostre llenguatge. Si no disposem d'una definició completa dels nombres reals *no podem pas garantir l'existència del límit U.* Bolzano creia haver-ho demostrat ja que, donada la successió (*), podia calcular *aproximacions* cada vegada més òptimes del límit, com si la successió d'aproximacions no fos també una successió convergent en el sentit de Bolzano (és a dir, del mateix tipus que (*)). I cal dir, seguint Dugac, que "entre els matemàtics del començament del segle XIX fou Bolzano probablement qui plantejà qüestions més pregones sobre els fonaments de la matemàtica", però aquest és un tipus de "salt" corrent en aquella època àdhuc entre els qui procuraven ésser rigorosos.

En el "Course d'Analyse" de Cauchy [1821] hom llegeix: "... Pel que fa al mètode he intentat donar-li tot el rigor que hom exigeix en geometria, de forma que mai no s'hagi de recórrer a raonaments trets de la generalitat de l'àlgebra". Es troba obligat a "admetre" certes proposicions "una mica dures", com que una sèrie divergent no té suma, i diu: "... les proposicions d'aquesta naturalesa... reverteixen en benefici de l'anàlisi i proporcionen molts temes de recerca que no són en absolut desdenyables. Així, abans de sumar una sèrie he hagut d'examinar en quins casos es poden sumar o, en altres paraules, quines són les condiciones de llur convergència". Amb això d'aquesta manera, ens pot sorprende que Cauchy a la pàgina 131 de la seva obra enunciï que

> "quan els diferents termes d'una sèrie de funcions d'una ma-

> teixa variable x, contínues respecte a aquesta a l'entorn d'un punt particular, convergeixen en aquest punt, la suma S de la sèrie, a l'entorn d'aquest punt particular, també és contínua"

i ho demostri. Sabem que aquesta proposició és falsa.

El 21 de desembre de 1807 Fourier llegeix a l'Acadèmia de Ciències de París la seva memòria sobre la "Teoria de la propagació de la calor en els sòlids" publicada l'any 1972. Torna a sotmetre-la a l'Acadèmia el 28 de setembre de 1811 i, finalment, l'any 1822, publica la seva "Teoria analítica de la calor". Fourier considera una funció f(x) definida en $]-\pi/2, +\pi/2[$ tal que el seu desenvolupament en sèrie trigonomètrica és de la forma

$$f(x) = a_0/2 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots$$

El problema consisteix aleshores a calcular els coeficients a_k, b_k —àdhuc quan f(x) és "discontínua i completament arbitrària". Reïx en aquesta rasca. Però en aquesta recerca s'hi troba involucrat, ultra el concepte mateix de funció arbritària, el de *convergència,* ens dirà Dirichlet. Fourier no s'havia preocupat pas de demostrar la convergència de la sèrie. Dirichlet arribà a la conclusió que la sèrie de Fourier d'una funció contínua f convergeix sempre vers f, però això no és pas així, com advertirà du Bois-Reymond l'any 1875. Riemann planteja a Cantor la qüestió següent: "si una sèrie trigonomètrica representa una funció f, la representació és única?" Cantor ataca de front aquesta qüestió i això el porta a la teoria dels conjunts.

Aquesta època fou doncs una època de grans avenços i de grans errors; els mateixos homes que ajudaven a progressar, amb els seus errors, intuïcions i conjectures obrien nous camins de reflexió i de progrés. Foren homes com Lagrange (1736-1817), Fourier (1768-1830), Gauss (1777-1855), Bolzano (1781-1848), Cauchy (1789-1857), Abel (1802-1829), Dirichlet (1805-1859), Stokes (1819-1903), Heine (1821-1881), Weierstrass (1825-1887), Riemann (1826-1866), Dedekind (1831-1916), Schwarz (1834-1921), Cantor (1845-1918).

Fóra molt interessant de seguir pas a pas la "crisi-fonamentació" de l'anàlisi però això constitueix el tema d'una altra comunicació; la nostra consisteix a veure quina és la tasca de Cantor.

L'any 1870 Georg Cantor és, juntament amb H. A. Schwarz, assistent de Heine, i abans havia estat deixeble de Weierstrass, i aquests matemàtics ja havien introduït d'una forma absolutament clara i precisa la convergència i la continuïtat uniformes, la construcció del nombre real, el concepte de funció, etc.

- *La convergència uniforme:* Weierstrass l'havia heretat del seu professor Guderman, que l'havia introduïda en el seu curs de 1838, si bé seria Weierstrass el qui, l'any 1841, establiria la definició $\epsilon - \delta$ i el qui, en el seu curs inèdit de 1861, l'aplicaria als teoremes de continuïtat, derivabilitat i integrabilitat de sèries de funcions i Heine el qui, l'any 1869, gràcies al teorema d'integració, establiria la unicitat del desenvolupament d'una funció en sèrie trigonomètrica i establiria el teorema: "si la sèrie trigonomètrica considerada convergeix uniformement cap a zero en l'interval $]-\pi, \pi[$, llevat d'un nombre finit de punts, aleshores, per tot $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = 0$".

- *La continuïtat uniforme:* Heine, l'any 1872, introduint definitivament aquest concepte i demostrant que "una funció contínua en un interval afitat $[a, b]$ hi és uniformement contínua", tanca una qüestió que Cauchy havia utilitzat implícitament en la seva demostració de l'"existència del límit que li permetria definir la seva integral en el cas de funcions contínues en $[a, b]$".
- *La construcció dels nombres reals:* Weierstrass elabora, pels volts de 1863, una teoria dels nombres reals que editarà Kossak l'any 1872 gràcies a unes notes preses en el semestre d'hivern de Weierstrass de 1865-66.

Per tot això no ens ha de sorprendre gens que Cantor l'any 1870 estigui en possessió de "certes nocions essencials de l'anàlisi" que li permeten a ell mateix de reflexionar sobre d'altres qüestions d'anàlisi que, com veurem, juntament amb la correspondència entre ell i Dedekind motivada per un encontre que, per atzar, tingueren ambdós matemàtics a Suïssa l'any 1872, quan tots dos ja havien publicat llurs treballs sobre la construcció dels nombres reals, el conduiran vers *la teoria cantoriana dels conjunts.*

Així doncs l'any 1870 Cantor estableix el següent teorema: "si $\lim_{n\to\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ per tot x de $[a, b]$, aleshores $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$" i en la seva demostració Cantor usa resultats típics de la topologia. En un altre treball del mateix any Cantor enuncia el teorema:

> "Si $f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ és convergent per tot x de $\mathbb{R}$, aleshores els coeficients a_n i b_n estan unívocament determinats per f".

És el teorema d'unicitat.

L'any 1871 en una memòria sobre sèries trigonomètriques hom troba els inicis de la teoria de conjunts. En aquesta memòria Cantor considera una sèrie trigonomètrica tal que $f(x) = 0$ per tot x. Per tot el que hem dit resulta que $a_n = b_n = 0$ per tot $n \in \mathbb{N}$. Però Cantor afebleix les hipòtesis del seu teorema d'unicitat: admet l'existència d'un nombre *finit* de punts d'un interval afitat en els quals o f(x) no convergeix o $f(x) \neq 0$ i demostra que el seu teorema continua essent vàlid. I afegeix: "aquesta generalització no és pas la darrera" car hem obtingut una "extensió que va més lluny".

El resultat ens el dóna Cantor l'any 1872 amb la noció de conjunt de

ν-èsima espècie: "si $f(x) = 0$ en $[0,2\pi]$, llevat en un conjunt P de punts de ν-èsima espècie, aleshores, per tot $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = 0$" i Zermelo ens dirà l'any 1930: "el naixement de la teoria cantoriana de conjunts, cal cercar-lo en aquest treball de 1872".

En aquest treball Cantor comença amb certes explicacions "destinades a il·luminar les diverses maneres com es poden comportar les "grandàries" numèriques en nombre finit o infinit". Així és com Cantor dóna la seva construcció dels nombres reals, completant $\mathbb{Q}$ mitjançant les successions fonamentals o de Cauchy. Però Cantor un cop ja té $\mathbb{R}$ continua completant i obté *nous conjunts* C, D, . . . que, si bé *no aporten res de nou* pel que fa referència a la completació de $\mathbb{Q}$, li permeten de classificar els nombres en diferents classes i així els elements del conjunt L els anomena elements d'espècie λ. I diu Cantor (1883): per a "descriure el contingut intel·lectual de la proposició '$\sin \pi/2 = 1$' cal donar $\pi/2$ i les seves potències per les successions

- per a $\pi/2$: a_n, on $a_n = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k+1)$;
- per a $(\pi/2)^{2m+1}$: a_n^{2m+1};
- per a $\sin \pi/2$: $\sum_{m=0}^{n} (-1)^m (\pi/2)^{2m+1}/(2m+1)$;

és a dir, $\sin \pi/2$ queda definit gràcies a una successió fonamental de segona espècie i la proposició anterior el que diu és que el nombre racional 1 és igual al nombre $\sin \pi/2$ donat per una successió fonamental de segona espècie".

Però aquesta disquisició epistemològica no és pas el fet més important d'aquesta classificació; Cantor –seguint Weierstrass– introdueix el concepte de punt d'acumulació d'un conjunt afitat P de $\mathbb{R}$ i aleshores pot parlar del *primer derivat P', del segon derivat P''*, . . . , del *ν-èsim derivat $P^{(\nu)}$*. Un conjunt P és "un conjunt de ν-èsima espècie" si, i només si, $P^{(\nu+1)} = \emptyset$ o bé $P^{(\nu)}$ és finit. "Un exemple de conjunt de ν-èsima espècie ens l'ofereix un conjunt format per un sol punt si és un nombre irracional de ν-èsima espècie amb certes condicions fàcils d'establir. Si desfem aquest nombre en els termes d'espècie $(\nu - 1)$ de la successió fonamental corresponent, etc., obtenim una infinitat de nombres racionals i aquest conjunt de punts és un conjunt d'espècie ν."

També és en aquest treball de 1872 on Cantor introdueix la noció de conjunt de tots els conjunts quan diu: "així, en aquesta teoria, el domini de tots els conjunts d'espècie determinada es considerarà com un gènere particular del *domini de tots els conjunts que podem concebre* i els conjunts d'espècie ν formaran aleshores una espècie particular en aquest gènere".

Com dèiem, amb aquest treball, i gràcies a la correspondència lliurada entre Cantor i Dedekind, s'obren les portes de la teoria cantoriana dels conjunts. Aquesta tasca comença l'any 1873 i acaba l'any 1884 i consta de dues etapes: de 1873 a 1877 i de 1878 a 1884. L'any 1890 Cantor produeix un article on apareix per primera vegada el *mètode de la diagonal.*

El punt de partida el trobem en la definició dels nombres irracionals: d'una banda tenim els nombres reals com a límits de successions de racionals i d'altra banda els tenim com a nombres de ν-èsima espècie –és a dir, generats per successions múltiples de ν entrades– que cal reduir a successions simples; cal doncs un procés de *linealització.*

El 29 de novembre de 1873, Cantor, en una carta a Dedekind, es pregunta si el conjunt dels nombres reals es pot posar en forma de successió simple: "a primer cop d'ull hom diria que no, que no és possible, ja que $\mathbb{N}$ està format de parts discretes mentre que $\mathbb{R}$ constitueix un continu; però aquesta observació no avança res... No estaríem per aquest motiu inclinats també a afirmar que $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ no es deixen coordinar?". Però $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ són coordinables així com $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}^k$ i, com indicarà Dedekind a Cantor, els nombres algèbrics també són coordinables amb $\mathbb{N}$. A la vista d'aquest fet Cantor pot escriure el 2 de desembre de 1873: "... si la resposta és *negativa* disposarem d'una nova demostració del teorema de Liouville que afirma l'existència de nombres transcendents".

El 7 de desembre del mateix any Cantor troba la resposta gràcies a la tècnica dels intervals encaixats, usant dues propietats del continu, que són:

- la *densitat:* entre dos nombres reals diferents hi ha sempre un tercer nombre real;
- la *completesa:* tota successió convergent defineix un element del conjunt.

Cantor suposa que $\mathbb{R}$ es pot linealitzar

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots \qquad (*)$$

Aleshores Cantor, convertint la successió (*) en una successió doble (a_n^λ) tal que $a_k^\lambda < a_{k+1}^\lambda$, construeix una successió d'intervals encaixats $[p_n, q_n]$ tal que, per cada k, existeix un n tal que els elements a_h^λ, $h \leq k$, no pertanyen a $[p_n, q_n]$, i tal que $p_n - q_n \to 0$. Aleshores el punt límit definit pels intervals encaixats no pot pas pertànyer a la successió (*).

Dedekind en una carta datada el 8 de desembre felicita Cantor pel seu resultat.

El 5 de gener de 1874, Cantor escriu a Dedekind: "En el mateix ordre d'idees es presenta la qüestió següent: podem coordinar... una superfície i una línia?... Em sembla, en aquests moments, que la resposta d'aquesta pregunta presenta grans dificultats –àdhuc si hom està fortament inclinat a una resposta *negativa* que podria tenir per suplèrflua una demostració". Malgrat que "a Berlín tot aquell a qui exposo aquesta dificultat em diu que la cosa és, per dir-ho d'alguna manera, absurda, ja que es comprèn immediatament que dues variables independents no es poden reduir mai a una de sola" (carta del 18 de març de 1874), Cantor no abandona pas el problema, si bé aquest resta endormiscat fins al 20 de juny de 1877, en què Cantor escriu a Dedekind una carta en la qual es troba una primera demostració de la bijecció entre $[0, 1]$ i $[0, 1]^{\rho}$. Diu Cantor: "tot nombre $x \in [0, 1]$ es pot escriure de manera única en la forma...

$$x = \alpha_1 \cdot 10^{-1} + \alpha_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + \alpha_\nu \cdot 10^{-\nu} + \ldots$$

on $0 \leqslant \alpha_\nu \leqslant 9$. Així tot nombre x determina una successió *infinita* i recíprocament. Si hom disposa del sistema

$$x_k = \alpha_{k1} \cdot 10^{-1} + \alpha_{k2} \cdot 10^{-2} + \ldots + \alpha_{k\nu} \cdot 10^{-\nu} + \ldots, k = 1, 2, \ldots \rho,$$

obtenim

$$y = \beta_1 \cdot 10^{-1} + \beta_2 \cdot 10^{-2} + \ldots + \beta_\nu \cdot 10^{-\nu} + \ldots,$$

on $\beta_{(n-1)\rho+k} = \alpha_{kn}$" i això clou la demostració.

El 22 de juny de 1877, Dedekind comunica a Cantor que la seva demostració és incompleta: "El fet que hagis subratllat el mot infinit em fa suposar que exclous el cas d'una fracció finita; és a dir, ... del tipus

$$x = \alpha_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + \alpha_\nu \cdot 10^{-\nu} + \alpha_{\nu+1} \cdot 10^{-(\nu+1)} + \ldots,$$

amb $\alpha_k = 0$ per tot $k \geqslant \nu$, que caldrà escriure en la forma

$$x = \alpha_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + (\alpha_\nu - 1) \cdot 10^{-\nu} + 9 \cdot 10^{-(\nu+1)} + 9 \cdot 10^{-(\nu+2)} + \ldots$$

... Si aquesta és la teva opinió aleshores la meva objecció és la següent. Faig $\rho = 2$ per a simplificar i

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu \ldots, \qquad y = 0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_\nu \ldots$$

i construeixo

$$z = 0, \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_\nu \ldots$$

on $\gamma_{2\nu-1} = \alpha_\nu, \gamma_{2\nu} = \beta_\nu, \ldots$ i aleshores tindrem una infinitat de fraccions vàlides a les quals z *mai* no serà igual, com per exemple

$$0{,}4783\,10507090\alpha_7 0\alpha_8 0\alpha_9 0 \ldots \alpha_\nu 0 \ldots,$$

ja que caldria que *y* fos igual a 0,730000...".

El 25 de juny Cantor respon a Dedekind donant una nova demostració del teorema i diu: "... Com que em proposo com a objectiu primordial el de convèncer-te, si és possible, de l'exactitud del meu teorema... cal cercar la diferència que existeix entre dues varietats amb un nombre *diferent* de dimensions en alguna raó diferent a la del nombre de coordenades independents, tingut en general com a característic". Dedekind no li respon pas immediatament i Cantor el 29 de juny el cuita: "el que t'he comunitat recentment és, per a mi, tan inesperat, tan nou, que no podré, per dir-ho d'alguna manera, arribar a una certa tranquil·litat d'esperit fins que no hagi rebut, molt honorat amic, el teu judici sobre la meva exactitud". I afegeix: "en tant que no m'hagis aprovat tan sols puc dir: 'Je le vois, mais je ne le crois pas' ".

La resposta de Dedekind és datada el 2 de juliol i, segons la meva opinió, és una petita obra d'art: "He examinat una vegada més la teva demostració i no hi he trobat cap llacuna; estic convençut que el teu interessant teorema és exacte i et felicito". Però Dedekind continua: "Segons el que dius podria semblar –si bé la meva opinió pot ésser inexacta– que vols, a partir del teu teorema, posar en dubte el significat o la importància d'aquest concepte (el del nombre de dimensions)... Jo em declaro convençut... o crec... que el nombre de dimensions d'una multiplicitat contínua és, ara com abans, el primer i el més important dels seus invariants, i haig de sortir en defensa de tots aquells que han escrit sobre aquest tema fins avui... Jo crec doncs provisionalment l'exactitud del teorema següent: "Si hom reïx a establir una correspondència unívoca i recíproca entre els punts d'una multiplicitat contínua A de a dimensions d'una banda i els punts d'una multiplicitat contínua B de b dimensions per l'altra, aleshores, si a i b són *desiguals,* aquesta correspondència necessàriament és *discontínua".* Tenim doncs, com diu Dugac, "el primer enunciat del teorema sobre la no existència d'aplicació bijectiva i bicontínua entre $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^p$, si $n \neq p$".

Cantor agraeix a Dedekind que hagi estudiat el seu treball i l'encoratja per tal que perseveri en el seu projecte, demanant-li que el tingui informat "sobre el significat del resultat...; segons elles (les idees de Dedekind) podré fer el meu propi judici sobre la forma de continuar el meu afer". Tranquil·litzat doncs per la resposta de Dedekind, l'any 1878 Cantor publica la seva memòria "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" que conté el teorema anterior. La memòria comença amb una introducció on és definida la noció de *potència:* dos conjunts M i N tenen la mateixa potència si, i només si, existeix una aplicació bijectiva de M en N i aleshores hom diu que M i N són equivalents. Insisteix en el fet, enunciat ja per Bolzamo el 1851, que un conjunt infinit no posseeix pas necessàriament la propietat dels conjunts finits que tenen una potència estrictament més gran que cada una de les seves parts pròpies. Anomena conjunts de *primera classe* o *primera potència* els conjunts que són equivalents a $\mathbb{N}$ i aleshores estableix el següent resultat: "Tota part infinita d'un conjunt de primera classe és de primera classe i la reunió numerable de conjunts de primera classe també és un conjunt de primera classe". És també en aquest treball on Cantor planteja per primera vegada el problema de la classificació, des del punt de vista de la potència, de tots els subconjunts infinits de $\mathbb{R}$. Creu que ha demostrat, si bé anuncia per a més endavant la demostració, que solament hi ha dues classes de subconjunts infinits de $\mathbb{R}$: "els que són equivalents a $\mathbb{N}$ i els que són equivalents a $\mathbb{R}$".

En una sèrie de treballs que van de 1879 a 1884, Cantor fa una exposició general de la seva teoria dels subconjunts infinits de $\mathbb{R}$. A diferència del seu treball de 1872, Cantor estableix ara dos gèneres de subconjunts de $\mathbb{R}$. Allà parlava dels conjunts de ν-èsima espècie que ara anomenarà de primer gènere. En canvi un conjunt $P \subseteq \mathbb{R}$ és de segon gènere si $P^{(\nu)} \neq \emptyset$ per tot $\nu \in \mathbb{N}$. Hom té que $P^{(\nu)} \subseteq P^{(1)}$ per tot $\nu \geqslant 1$, però en canvi P no és pas necessàriament un subconjunt de $P^{(1)}$. Ara, a més, Cantor introdueix el concepte de subconjunt *dens* en un interval, si $P^{(1)}$ és l'interval. En aquest cas, P és necessàriament de segon gènere –si bé el recíproc és fals– i, en canvi, els de primer gènere no són pas densos en l'interval. "El problema del continu s'aguditza: ... una definició abstracta d'aquestes dues potències i de llur relació únicament és possible si els dos tipus de conjunts als quals s'apliquen es poden caracteritzar conceptualment. La derivació, permetrà aquesta caracterització?". Cantor considera $R = \bigcap_{\nu \in \mathbb{N}^*} P^{(\nu)} = P^{\omega}$, *conjunt derivat de P d'ordre infinit.*

És el conjunt de punts comuns a tots els derivats finits. Això el porta a considerar el *conjunt buit.* Solament considera P^{ω} si és no buit, és a dir, si tots els derivats finits tenen punts. Ara pot continuar derivant i obté

$$P^{\omega+1}, \ldots, P^{\omega+n}, \ldots, P^{\omega+\omega}, \ldots, P^{n\omega}, \ldots, P^{\omega^2},$$

$$\ldots, P^{\omega^\omega}, \ldots, P^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$$

on $P^{\omega+\omega} = \bigcap_{\omega \in \mathbb{N}^*} P^{\omega+n}$ i $P^{\omega^2} = \bigcap_{\omega \in \mathbb{N}^*} P^{n\omega}$, etc.

Els conjunts del primer gènere són caracteritzats doncs pel fet que $P^{\omega} = \emptyset$. Gràcies a l'anterior construcció hom obté tres resultats relatius a la potència dels subconjunts:

1er. Si un subconjunt és *aïllat,* és a dir, tal que $P \cap P^{(1)} = \emptyset$, resulta que és numerable;

2on. si $P^{(1)}$ és numerable, P també és numerable;

3er. tot conjunt P tal que $P^{(\alpha)} = \emptyset$ és numerable tant si α és finit com si és transfinit.

Aquí Cantor es troba obligat, en el cas en què α és infinit, a recórrer a la *inducció completa* "sense remarcar l'extensió donada... al procediment d'inducció. És que el moviment dialèctic que engendra la successió dels infinits li apareix amb l'evidència imposada per la lògica. Però aquí se'n manifesta, també, la limitació: la inducció no pot provar la demostrabilitat si no és que no comporta ella mateixa més que una infinitat numerable d'etapes".

D'ací a la teoria dels ordinals hi ha un pas i Cantor el dóna.

Heus aquí la gènesi de la teoria cantoriana dels conjunts. La tasca creativa de Cantor no acaba pas aquí però canvia.de to. El 5 de novembre de 1882 Cantor escriu a Dedekind una carta que conté per primera vegada el concepte d'*infinit actual*. "Precisament després de les nostres darreres trobades a Harzburg i Eisenach, Déu totpoderós ha volgut concedir-me les més sorprenents clarors i també les més inspirades pel que fa a la teoria dels conjunts i a la teoria dels nombres o, més encara, que trobi allò que des de fa tant de temps fermenta en mi, allò a què he dirigit llargues recerques... Arribo com segueix a la segona classe de nombres enters reals:

> així com el nombre ν expressa que tenim unitats i que les hem afegit l'una amb l'altra, així creo en primer lloc un nombre nou ω que ha d'expressar que el conjunt $\mathbb{N}$ tot sencer s'ha donat..."

D'aquesta manera Cantor abandona definitivament el suport de l'anàlisi matemàtica i s'endinsa vers la *teoria dels conjunts*.

BIBLIOGRAFIA

Abel: "Untersuchungen über die Reihe $1 + \frac{m}{1} . x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \ldots$" *Journ. für die reine und angew. Math.*, **1**, p. 311, 1826.

Du Bois-Reymond: "Beweis dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihen..." *Abhdl. d. bayer. Akad, Math. Nat. Wiss. Kl.*, **XII**, pp 117-167. 1875.

Bolzano: "Rein analytischer Beweis des Lehrstzer dass zwischen je zwei Werten die eine antgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege". *Abhdl. d. Kgl. Ges. der Wiss. Prag.*, 1817.
"Paradoxien des Unendlichen". Reclam, Leipzig, 1851.

Cantor: "Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lahrsatz", *Journ für die reine und angew. Math*, **2**, pp. 130-138, 1870.
- "Notiz zu dem Aufsatze: Beweis dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sic nur auf eine Weise in dieser Form darstellen lässt", *Journ. für die reine und angew. Math.*, **3**, pp. 249-6. 1871.
- "Beweiss, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion f(x) sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lästt". *Journ. für die reine und angew. Math.*, 2, pp. 139-142. 1870.
- "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen". *Math. Ann.*, **5**, pp. 123-132. 1872. Traducció francesa: *Acta Math.*, **2**, pp. 336-348. 1883.
- "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen". *Journ. für die reine und angew. Math.*, 7, pp. 258-262. 1874. Traducció francesa: *Acta Match.*, **2**, pp. 305-310. 1883.
- "Eine Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre". *Journ. für die reine und angew. Math.*, **84**, pp. 242-252. 1878. Traducció francesa: *Acta Math.*, **2**, pp. 311-328. 1883.
- "Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten". *Math. Ann.*, **15**, pp. 1-7. 1879.
- Ídem, **17**, pp. 355-358. 1880.
- Ídem, **20**, pp. 113-121. 1882.
- Ídem, **21**, pp. 51-58. 1883.
- Ídem, **23**, pp. 453-488. 1884.
- Traducció francesa parcial: *Acta Math.*, **2**, pp. 349-408. 1883.
- "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre". *Math. Ann.*, **46**, pp. 481-512. 1895.
- Ídem, **49**, pp. 207-246. 1897.
- Traducción francesa: F. Marotte, Hermann. París, 1899.

"Gesammelte Abhandlungen". Springer, Berlín. 1930.
Olms, Hildesheim. 1962.

Cantor-Dedekind: "Briefweschel", Hermann, París. 1937. Traducció francesa: J. Cavailles, "Philosophie mathématique", pp. 177-249. Hermann, París. 1962.

Cauchy: "Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique". Debure, París. 1821.

Cavailles: "Philosophie mathématique". Hermann. París. 1962.

Dirichlet: "Sur la convergence de séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites donnés". *Journ. für die reine und angew. Math.*, **4**, pp. 157-169. 1829.

Dugac: "Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900". Sous la direction de Dieudonné. Hermann, París. 1978.

Fourier: "Théorie de la chaleur dans les solides", lu a l'Institut le 21 décembre 1807.
– "Théorie analytique de la chaleur", Didot, París, 1822.

Heine: "Über die trigonometrische", *Reihen Journ. für reine und angew. Math.*, **71**. 1870.
– "Die Elemente der Functionenlehre". *Journ. für eine und angew. Math.*, **74**. 1872.

Hilbert: "Über das Unendliche". *Math. Ann.*, **95**. 1926.

Reimann: "Über die Dastellbarkeit einer Funciton durch eine trigonometrische Reihe". *Abhdl. d. Kgl. Ges. Wiss. Gott., Math. Class.*, **13**. 1866.

Weierstrass: "Zur Theorie der Potenzreihen". Math. Werke, **1**, pp. 67-74, Mayer und Muller, Berlín. 1894.
– "Die Elemente der Arithmetik". Programm Freid. Werder Gymn., Berlín. 1872.

Zermelo: "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche". *Fund. Math.*, **14**, pp. 29-47. 1930.